数理解析研究所講究録
931巻 1995年 37-44

Painlevé IV型方程式の多変数化

東京大学数理科学研究科 D2　川向 洋之　(KAWAMUKO, Hiroyuki)

Painlevé 6 型方程式の多変数化として Garnier system がある。また、木村[1]では、2 変数の Garnier system を与える線型方程式を退化させ、I 型から V 型までの 2 変数化を与えている。特に、IV 型の拡張は Riemann 図式が

$$\left(\begin{array}{ccccccc} x=0 & x=\lambda_1 & x=\lambda_2 & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hspace{12em}}^{x=\infty}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa_\infty \\ \kappa_0 & 2 & 2 & 1/3 & t_2/2 & t_1 & \kappa_\infty-\kappa_0+1 \end{array}\right)$$

(ただし、$x=\lambda_1, \lambda_2$ はみかけの特異点で、$\kappa_0 \notin \mathbb{Z}$)

で与えられる線型方程式の Isomonodromic deformation を使って得られることが記されている。

この原稿では、上記の Riemann 図式を参考にして、3 変数以上の Painlevé IV 型方程式を定義し、3 変数の場合の特殊解を記す。

0. 記号の約束

g, κ_0 は、初めから与えられている数字で、g は、自然数、κ_0 は、非整数とする。

$$\sum_{(i)} := \sum_{i=1}^{g}, \quad \sum_{(i)}^{(j)} := \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{g} \qquad \prod_{(i)} := \prod_{i=1}^{g}, \quad \prod_{(i)}^{(j)} := \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{g}$$

$$t_0 := \kappa_0 - 1$$

$$t_{g+1} := 1$$

$$t_N := 0 \quad (\text{if } N<0 \text{ or } N>g+1)$$

$$\Lambda(x) := \prod_{(i)} (x - \lambda_i) \qquad \Lambda'(\lambda_k) := \frac{d}{dx} \Lambda(x) \Big|_{x=\lambda_k}$$

$$\sigma_j := \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dx^j} \prod_{(i)} (1 + \lambda_i x)$$

$$\sigma_{k.j} := \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dx^j} \prod_{(i)}^{(k)} (1 + \lambda_i x)$$

<u>Rem</u> $\sigma_j = 0$ if $j < 0$ or $j > g+1$

1. Isomonodromic deformation

次の Riemann 図式を持つ線型常微分方程式を考える.

$$(R) \quad \left(\begin{array}{cccc|ccccccc} x=0 & x=\lambda_1 & \cdots & x=\lambda_g & \multicolumn{7}{c}{x=\infty} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\kappa_\infty \\ \kappa_0 & 2 & \cdots & 2 & \frac{1}{g+1} & \frac{t_g}{g} & \frac{t_{g-1}}{g-1} & \cdots & \frac{t_g}{2} & t_g & \kappa_\infty - \kappa_0 + 1 \end{array} \right)$$

ただし, $\kappa_0 \notin \mathbb{Z}$ で, $x = \lambda_k$ $(k = 1, \cdots, g)$ は見かけの特異点とする.

<u>Prop</u>

Riemann 図式 (R) を持つ方程式は, 次の様になる.

$$\frac{d^2}{dx^2} y + p_1(x,t) \frac{d}{dx} y + p_2(x,t) y = 0 \qquad \text{--- (1)}$$

$$p_1(x,t) := \frac{1-\kappa_0}{x} - \sum_{k=1}^{g+1} t_k x^{k-1} - \sum_{(k)} \frac{1}{x - \lambda_k}$$

$$p_2(x,t) := -\frac{1}{x} \sum_{(k)} a_k(t) x^{k-1} + \kappa_\infty x^{g-1} + \sum_{(k)} \frac{\lambda_k \mu_k}{x(x - \lambda_k)}$$

$$a_j(t) := (-1)^{g-j} \Sigma_{(\ell)} \frac{1}{\Lambda'(\lambda_\ell)} \Big[\lambda_\ell \sigma_{\ell.g-j} \mu_\ell^2 - \sigma_{\ell.g-j} \big(\lambda_\ell^{g+1} + \sum_{(k)} t_k \lambda_\ell^k$$
$$+ \kappa_0 \big) \mu_\ell + \kappa_\infty \lambda_\ell^g \sigma_{\ell.g-j} \Big]$$

$$- (1 - \delta_{j.g}) \Sigma_{(\ell)} \sum_{k=0}^{g-j-1} (-1)^k \sigma_{\ell.k} \lambda_\ell^{g-j-k} \frac{\mu_\ell}{\Lambda'(\lambda_\ell)}$$

Thm

λ_j, μ_j, t_j の有理関数 $\tilde{K}_j$ $(j=1,2,\cdots,g)$ を次の様におく.

$$(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \cdots, \tilde{K}_g) := (a_1, a_2, \cdots, a_g)\begin{pmatrix} t_2 & t_3 & \cdots & t_{g+1} \\ t_3 & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \vdots & t_{g+1} & & \\ t_{g+1} & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1/2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1/g \end{pmatrix}$$

$$\text{ie} \quad \tilde{K}_\ell := \frac{1}{\ell}\sum_{i=1}^{g} a_i t_{\ell+i}$$

この時. 方程式 (1) が Isomonodromic deformation を許すための必要十分条件は.

$\lambda_j = \lambda_j(t)$, $\mu_j = \mu_j(t)$ が Hamiltonian system

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial t_j} = \frac{\partial \tilde{K}_j}{\partial \mu_i} \qquad \frac{\partial \mu_i}{\partial t_j} = -\frac{\partial \tilde{K}_j}{\partial \lambda_i} \qquad (i, j = 1, \cdots, g) \qquad \text{—} \quad (2)$$

をみたすことである. ——

Rem　Hamiltonian system (2) は. $g=1$ の時 Painlevé Ⅳ 型、$g=2$ の時は. 木村 [1] の Hamiltonian と同値である.

2. Polynomial Hamiltonian structure

Hamiltonian system を考える際. Hamiltonian は 正準変数に対し. 多項式であった方が扱いやすい. よって. Hamiltonian system (2) の Hamiltonian を多項式にすることを考える。

<u>Thm</u>

σ_k, ρ_k を.

$$\sigma_k := \text{" } \lambda \text{ に関する基本対称式 "}$$

$$\rho_k := (-1)^{k-1} \sum_{(\ell)} \frac{\lambda_\ell^{g-k}}{\Lambda'(\lambda_\ell)} \mu_\ell$$

とおくと. $\tilde{K}_j$ は. σ_k, ρ_k, t の多項式として表される。さらに. $(\lambda, \mu, \tilde{K}, t) \longrightarrow (\sigma, \rho, \tilde{K}, t)$ は正準変換. i.e. $\lambda_j = \lambda_j(t)$, $\mu_j = \mu_j(t)$ が Hamiltonian system (2) をみたすなら $\sigma_k = \sigma_k(t)$, $\rho_k = \rho_k(t)$ は.

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial t_j} = \frac{\partial \tilde{K}_j}{\partial \rho_i}, \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t_j} = -\frac{\partial \tilde{K}_j}{\partial \sigma_i}$$

をみたす。——.

参考のため. $g=3$ の a_1, a_2, a_3 を記しておく.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & \sigma_3, & \sigma_2\sigma_3 \\ 1, & -\sigma_2+\sigma_1^2, & -\sigma_1\sigma_3 \\ 0, & -\sigma_1, & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1^2 \\ \rho_2^2 \\ \rho_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0, & 2\sigma_3, & 2\sigma_1\sigma_3 \\ 2\sigma_1, & 0, & -2\sigma_3 \\ -2, & 0, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1\rho_2 \\ \rho_1\rho_3 \\ \rho_2\rho_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\kappa_0-2-\sigma_1\sigma_3-\sigma_3 t_3, & -(\kappa_0+1)\sigma_1-\sigma_2\sigma_3+\sigma_3 t_2, & -\kappa_0\sigma_2-\sigma_3^2-\sigma_3 t_1 \\ -\sigma_3+\sigma_1\sigma_2-t_1+\sigma_2 t_3, & \kappa_0+1+\sigma_2^2-\sigma_1 t_1-\sigma_2 t_2+\sigma_3 t_3, & \kappa_0\sigma_1+\sigma_2\sigma_3-\sigma_3 t_2 \\ \sigma_2-\sigma_1^2-t_2-\sigma_1 t_3, & \sigma_3-\sigma_1\sigma_2+t_1-\sigma_2 t_3, & -\kappa_0-\sigma_1\sigma_3-\sigma_3 t_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix}$$

$$+ \kappa_\infty \begin{bmatrix} \sigma_3 \\ -\sigma_2 \\ \sigma_1 \end{bmatrix}$$

Hamiltonian $\tilde{K}$ は. これらの和で表される.

3.　τ函数と特殊解.

ここでは $g=3$ の場合についてのみ話す.

まず天下り的に次の Lem を挙げる.

Lem 1

$$t_1 = \xi_1 - 2\xi_2\xi_3 + \xi_3^3$$

$$t_2 = -2\xi_2 + 3\xi_3^2$$

$$t_3 = 3\xi_3$$

$$\sigma_1 = q_1 - 2\xi_3 \qquad \rho_1 = p_1 + \xi_3 p_2$$

$$\sigma_2 = q_2 + \xi_3^2 - q_1\xi_3 - \xi_2 \qquad \rho_2 = p_2$$

$$\sigma_3 = q_3 \qquad \rho_3 = p_3$$

$$H_1 = \tilde{K}_3 \quad (= a_3)$$

$$H_2 = -t_3\tilde{K}_1 - 2\tilde{K}_2 + t_3\tilde{K}_3 + p_2 \quad (= -a_2 + t_3 a_3 + p_2)$$

$$H_3 = t_2\tilde{K}_1 + 2t_3\tilde{K}_2 + 3\tilde{K}_3 + 2\rho_1 + \sigma_1\rho_2 \quad (= a_1 + 2\rho_1 + \sigma_1\rho_2)$$

とおくと. $(\sigma, \rho, \tilde{K}, t) \to (q, p, H, \xi)$ は正準変換で. H_j は. 次の様にかける.

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & -q_1, & q_3 \\ -1, & q_2 - \xi_2 - q_1^2, & q_3(q_1 - \xi_3) \\ 0, & q_3, & q_3(q_2 - q_1\xi_3 - \xi_2 + \xi_3^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_3^2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -2, & 0, & 0 \\ -2q_1, & 0, & 2q_3 \\ 0, & 2q_3, & 2q_3(q_1 - \xi_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1p_2 \\ p_1p_3 \\ p_2p_3 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} q_2 - q_1^2 + \xi_2 & , \; q_3 - q_2 q_1 + q_1 \xi_2 + \xi_1 & , \; -q_3 q_1 - q_3 \xi_3 - \kappa_0 \\ q_3 - q_2 q_1 + q_1 \xi_2 + \xi_1 & , \; -q_3 \xi_3 - q_2^2 + q_1 \xi_1 + \xi_2^2 - \kappa_0 & , \; -q_3 q_2 + q_3 \xi_3^2 - q_1 \kappa_0 + \xi_3 \kappa_0 - q_3 \xi_3 \\ -q_3 q_1 - q_3 \xi_3 - \kappa_0 & , \; -q_3 q_2 + q_3 \xi_3^2 - q_1 \kappa_0 + \xi_3 \kappa_0 - q_3 \xi_3 & , \; -q_3^2 - q_3 \xi_3^3 + 2 q_3 \xi_2 \xi_3 - q_3 \xi_1 - q_2 \kappa_0 + q_1 \xi_3 \kappa_0 + \xi_2 \kappa_0 - \xi_3^2 \kappa_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$+ \kappa_\infty \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 - \xi_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

<u>Lem</u> 2

Hamiltonian H_j ($j = 1, 2, 3$) に対し、 H_i と H_j の Poisson bracket $\{H_i, H_j\}$ は 0.

また、$\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)$ は λ_k も μ_k も 定数と思って t_i について微分せよという意味とすると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right) H_j = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) H_i \qquad \text{— (3)}$$

が成立. ——

Lem 1 の正準変換を行うのは Lem 2 の (3) が成り立つ様にするためである.

そして、この等式から $\sum_{i=1}^{3} H_i \, d\xi_i$ は closed であることがわかる. よって 関数 $\tau = \tau(\xi)$ を、

$$d \log \tau := \sum_{i=1}^{3} H_i \, d\xi_i$$

で定義できる. また、

<u>Lem</u> 3

$$p_1 = \hat{p}_1 + \xi_1 + q_1^3 - 2 q_1 q_2 + q_3$$

$$p_2 = \hat{p}_2 + \xi_2 - q_1^2 + q_2$$

$$p_3 = \hat{p}_3 + \xi_3 + q_1 + \frac{\kappa_0}{q_3}$$

$$\bar{H}_1 = H_1 + q_1$$

$$\bar{H}_2 = H_2 + q_2$$

$$\bar{H}_3 = H_3 + q_3$$

とおくと．$(q, p, H, \xi) \longrightarrow (q, \hat{p}, \bar{H}, \xi)$ は正準変換で．Hamiltonian $\bar{H}$ は．H を

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = E_1 \begin{bmatrix} p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_3^2 \end{bmatrix} + E_2 \begin{bmatrix} p_1 p_2 \\ p_1 p_3 \\ p_2 p_3 \end{bmatrix} + F \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} + \kappa_\infty \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 - \xi_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

と表わした時．

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \\ \bar{H}_3 \end{bmatrix} = E_1 \begin{bmatrix} \hat{p}_1^2 \\ \hat{p}_2^2 \\ \hat{p}_3^2 \end{bmatrix} + E_2 \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \hat{p}_2 \\ \hat{p}_1 \hat{p}_3 \\ \hat{p}_2 \hat{p}_3 \end{bmatrix} - F \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{bmatrix} + \kappa_\infty \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 - \xi_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

となる．——

この Lem から．関数 $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\xi)$ を $d \log \bar{\tau} = \sum_{i=1}^{3} \bar{H} d\xi_i$ で定義すると．

$$d \log \frac{\bar{\tau}}{\tau} = q_1 dt_1 + q_2 dt_2 + q_3 dt_3$$

となることに注意．

最後に．次の Prop を挙げてこの原稿を終ることにする．

<u>Prop</u>

$u = \bar{\tau}/\tau$，$\kappa_\infty = 0$，$p_j = 0$ $(j = 1, 2, 3)$ とすると．Hamiltonian system

$$\frac{\partial q_k}{\partial \xi_i} = \frac{\partial H_i}{\partial p_k} \qquad \frac{\partial p_k}{\partial \xi_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial q_k}$$

は．次の様になる．

$$\partial_1^2 u = \partial_2 u + \xi_2 u$$

$$\partial_1 \partial_2 u = \partial_3 u + \xi_1 \xi_3 \partial_1 u$$

$$\partial_1 \partial_3 u = -\xi_3 \partial_3 u - \varkappa_0 u$$

$$\partial_2^2 u = -\xi_3 \partial_3 u + \xi_1 \partial_1 u + \xi_2^2 u - \varkappa_0 u$$

$$\partial_2 \partial_3 u = \xi_3^2 \partial_3 u - \varkappa_0 \partial_1 u + \varkappa_0 \partial_3 u - \xi_3 \partial_3 u$$

$$\partial_3^2 u = -\xi_3^3 \partial_3 u + 2 \xi_2 \xi_3 \partial_3 u - \xi_1 \partial_3 u - \varkappa_0 \partial_2 u + \varkappa_0 \xi_3 \partial_1 u + \varkappa_0 \xi_2 u - \varkappa_0 \xi_3^2 u$$

(ただし. $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$)

参考文献

[1] H. Kimura., The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure, Ann. Mat. Pura. Appl., CLV (1989), P. 25 - 34

[2] D. Liu., Holonomic deformation of linear differential equation of the A_3 Type, preprint